

# 第一章 习题

1. 证明矩阵的迹满足:  $\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$ 。
2. 证明: 如果两个厄米矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的乘积  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$  也是厄米矩阵, 那么  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  一定对易。
3. 证明行列式具有如下性质:
  - (1) 如果一个矩阵的某一行或某一列矩阵元都为零, 则其行列式为零。
  - (2) 对角矩阵、上三角矩阵或下三角矩阵的行列式为对角元的乘积。
  - (3) 交换任何两行或两列所得的新矩阵的行列式与原矩阵的行列式相差一个负号。
  - (4) 如果一个矩阵存在两行或两列的矩阵元一一对应相等, 则其对应的行列式为零。
  - (5) 一个矩阵的转置矩阵的行列式与原矩阵的行列式相等:  $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$ 。
  - (6) 一个矩阵的厄米共轭矩阵的行列式等于原矩阵行列式的复共轭:  

$$|\mathbf{A}^\dagger| = |\mathbf{A}|^*。$$
  - (7)  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ 。
  - (8) 对于任意一组数  $c_k$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , 矩阵具有如下线性性质,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \sum_{k=1}^m c_k B_{1k} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \sum_{k=1}^m c_k B_{2k} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & \sum_{k=1}^m c_k B_{nk} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \equiv \sum_{k=1}^m c_k \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & B_{1k} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & B_{2k} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & B_{nk} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

4. (选做) 证明如果对于任意矢量  $|u\rangle$ , 算符  $\hat{U}$  满足  $\langle u | \hat{U}^\dagger \hat{U} | u \rangle = \langle u | u \rangle$ , 则  $\hat{U}$  是个么正算符。
5. 证明: 厄米算符的本征值必为实数, 厄米算符对应于不同本征值的本征矢之间是正交的, 对应于相同本征值 (即简并) 的线性无关本征矢量一定可以取为

互相正交并归一化。

6. (选做) 如果使用非正交归一化基矢, 应该如何定义一个算符的矩阵表示, 使得对应于算符关系  $\hat{A} = \hat{B}\hat{C}$ , 相应的矩阵表示满足  $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$  关系?
7. 伦敦色散相互作用的简单谐振子模型: 描述两个惰性气体原子之间的色散相互作用最简单的模型是用线性谐振子模型描述电子关于原子核的瞬时振荡(如图 1 所示)。

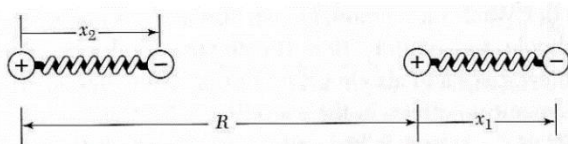


图 1. 色散相互作用的谐振子模型。

零阶的哈密顿算符对应于两个独立的谐振子哈密顿算符相加, 而谐振子之间的静电相互作用对应于微扰项, 即,

$$\hat{H}_0 = \left( \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x_1^2 \right) + \left( \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x_2^2 \right)$$

$$\hat{H}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{R + x_1 - x_2} - \frac{e^2}{R - x_2} - \frac{e^2}{R + x_1} \right)$$

上式中,  $\epsilon_0$  为真空介电常数。当  $R \gg x_1, x_2$  时, 上式可简化为

$$\hat{H}' \approx -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 R^3} x_1 x_2$$

请使用微扰理论推导出两个谐振子原子之间的相互作用能。